Machine Translated by Google

Machine Translated by Google

Machine Translated by Google

CAPÍTULO 1

A Origem da Teoria Quântica

A Lei de Rayleigh-Jeans

1. Radiação de Corpo Negro em Equilíbrio. Historicamente, a teoria quântica começou com a tentativa de explicar a distribuição de equilíbrio da radiação eletromagnética em uma cavidade oca. Portanto, começaremos com uma breve descrição das características dessa distribuição de radiação. A energia radiante se origina nas paredes da cavidade, que emitem continuamente ondas de todas as frequências e direções possíveis, a uma taxa que aumenta muito rapidamente com a temperatura. A quantidade de energia radiante na cavidade, no entanto, não continua a aumentar indefinidamente com o tempo, porque o processo de emissão é contrabalançado pelo processo de absorção, que ocorre a uma taxa proporcional à intensidade da radiação já presente na cavidade. No estado de equilíbrio termodinâmico, a quantidade de energia U(v) dv, na faixa de frequência entre " e " + dv, será determinada pela condição de que a taxa na qual as paredes emitem essa frequência seja equilibrada pela taxa na qual elas absorvem essa frequência. Foi demonstrado experimental e teoricamente* que, após o equilíbrio ser atingido, U(v) depende apenas da temperatura das paredes, e não do material de que as paredes são feitas nem de sua estrutura.

Para observar essa radiação, fazemos um furo na parede. Como o furo é muito pequeno em comparação com o tamanho da cavidade, ele produz uma mudança insignificante na distribuição da energia radiante dentro da cavidade. A intensidade da radiação por unidade de ângulo sólido que passa pelo furo é então

É facilmente demonstrado que /(v) = ;.. U(v), onde c é a velocidade da luz. t

As medições revelam que, a uma determinada temperatura, a função U(v) segue uma curva semelhante à curva sólida da Fig. 1. Em baixas frequências, a energia é proporcional a v^2, enquanto em altas frequências ela decresce exponencialmente. À medida que a temperatura aumenta, o máximo se desloca na direção de frequências mais altas; isso explica a mudança na cor da radiação emitida por um corpo conforme ele se aquece.

Por meio de argumentos termodinâmicos, Wien mostrou que a distribuição

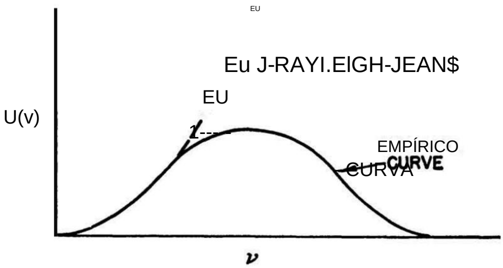
• Richtmeyer e Kennard. (Consulte a lista de referências na pág. 2.) t Consulte Richtmeyer e Kennard para uma dedução desta fórmula e também para uma descrição mais completa da radiação de corpo negro. O termo "corpo negro" surgiu

Machine Translated by Google

deve ser da forma U(v) = v'f(v/T). A função, no entanto, não pode ser determinada apenas pela termodinâmica. Wien obteve um ajuste razoavelmente bom, mas não perfeito, à curva empírica com a fórmula

U(v) dv"" v8e-11•t•T dv (Lei de Viena) (1)

Aqui, " é a constante de Boltzmann e h é uma constante determinada experimentalmente (que mais tarde se revelou ser o famoso quantum de ação) .



Flo. 1

A eletrodinâmica clássica, por outro lado, leva a uma forma perfeitamente definida e bastante incorreta para U(v). Essa distribuição teórica, que será derivada nas seções subsequentes, é dada por

$$U(\nu)\,d\nu \sim \kappa T \nu^2\,d\nu \qquad \text{(Lei de Rayleigh-Jeans)} \qquad (2)$$

A Figura 1 mostra que a lei de Rayleigh-Jeans concorda com os resultados experimentais em baixas frequências, mas gera radiação em excesso para altas frequências. De fato, se tentarmos integrar em todas as frequências para encontrar a energia total, o resultado diverge, levando-nos à conclusão absurda de que a cavidade contém uma quantidade infinita de energia. Experimentalmente, a curva correta começa a divergir consideravelmente da lei de Rayleigh-Jeans quando hv se torna da ordem de KT. Portanto, devemos tentar desenvolver uma teoria que leve aos resultados clássicos para hv < KT, mas que se desvie da teoria clássica em frequências mais altas.

Antes de prosseguirmos com a discussão sobre como a teoria clássica deve ser modificada, será instrutivo examinar em detalhes a dedução da lei de Rayleigh-Jeans. Ao longo dessa análise, não apenas compreenderemos as falhas da física clássica, como também seremos levados a conhecer certos conceitos da física clássica que são muito úteis para a compreensão da teoria quântica. Além disso, a introdução da análise de Fourier...

---

porque a radiação de um orifício em tal cavidade é idêntica à proveniente de um objeto perfeitamente negro. •

Wien não introduziu de fato a constante de Planck, h, mas sim a constante h/«.

Machine Translated by Google

Lidar com esse problema clássico também servirá como preparação para seu uso posterior em problemas da teoria quântica.

2. Energia Eletromagnética. De acordo com a eletrodinâmica clássica, o espaço vazio contendo radiação eletromagnética possui energia. De fato, essa energia radiante é responsável pela capacidade de uma cavidade oca absorver calor. Em termos do campo elétrico, S(x, y, z, t), e do campo magnético, 3C(x, y, z, t), a energia pode ser demonstrada como*

E = 8'11" J (82 + 3C2) dr (3)

onde dr significa integração em todo o espaço disponível para os campos.

Nosso problema, então, é determinar como essa energia se distribui entre as diversas frequências presentes na cavidade quando as paredes estão a uma dada temperatura. O primeiro passo será usar a análise de Fourier para os campos e expressar a energia como a soma das contribuições de cada frequência. Ao fazer isso, veremos que o campo de radiação se comporta, em todos os aspectos, como uma coleção de osciladores harmônicos simples, os chamados "osciladores de radiação". Em seguida, aplicaremos a mecânica estatística a esses osciladores e determinaremos a energia média de cada oscilador quando ele estiver em equilíbrio com as paredes à Finalmente, determinaremos o número de osciladores em uma determinada faixa de frequência e, multiplicando esse número pela energia média de um oscilador, obteremos a energia de equilíbrio correspondente a essa frequência, ou seja, a lei de Rayleigh-Jeans.

3. Potenciais Eletromagnéticos. Começamos com uma breve revisão da eletrodinâmica. As equações diferenciais parciais do campo eletromagnético, segundo Maxwell, são dadas por:

VXS= ta:re --c em (4) v + · 'ÿÿ"J tas c em 1 x :re V. 8 = 41rp (6)

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0 \quad (5)$$ (7)

onde j é a densidade de corrente e ÿ é a densidade de carga. Podemos mostrar a partir de (4) e (5) que o campo elétrico e magnético mais geral pode ser expresso em termos dos potenciais vetorial e escalar, a e cb, da seguinte forma:

:JC=VXa (8)

e 8 = 1 aa -gato -Vc/J (9)

Quando 8 e 3C são expressos nesta forma, (4) e (5) são satisfeitos identicamente, e as equações para a e cb são então obtidas pela substituição das relações (8) e (9) em (6) e (7).

Agora, as equações (8) e (9) não definem os potenciais de forma única em termos

* Richtmeyer e Kennard, Cap. 2.

Machine Translated by Google

dos campos. Se, por exemplo, adicionarmos um vetor arbitrário, -Vif;, ao potencial vetor, o campo magnético não é alterado porque V X Vif; = 0.

Se adicionarmos simultaneamente a quantidade ÿ $\frac{\partial}{\partial t}$ se; ao potencial escalar, o

O campo elétrico também permanece inalterado. Assim, constatamos que os campos elétrico e magnético permanecem invariantes sob a seguinte transformação dos potenciais;*

$$\left.\begin{aligned} &\text{tl =a- Vif;} \\ &\phi' = \phi + \frac{1}{c}\frac{\partial\psi}{\partial t} \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

O que foi descrito acima é chamado de "transformação de calibre".

Podemos utilizar a invariância dos campos a uma transformação de calibre com o propósito de simplificar as expressões para £ e :re. Uma escolha comum é fazer div a = 0. Para mostrar que isso é sempre possível, suponha que começamos com um conjunto arbitrário de potenciais, a(x, y, z, t) e q,(x, y, z, t). Em seguida, fazemos a transformação de calibre da eq. (10) para um novo conjunto de potenciais, A' e q,'. Para obter div tl = 0, devemos escolher se; tal que

div a - V'!if; = 0

Mas o que foi dito acima é apenas a equação de Poisson definindo se, em termos da função especificada, div a. Sua solução sempre pode ser obtida e é, de fato, igual a

se;= _ _!_41r Se div a(x', y', z', t) dx' dy' dz' / lr- r'l

Assim, provamos que uma transformação de calibre que resulta em div tl = 0 pode sempre ser realizada.

Agora mostramos que no espaço vazio a escolha div a = 0 também leva a q, = 0 e, portanto, a uma simplificação considerável na representação do campo elétrico. Para isso, substituímos a equação (9) em (7), definindo p = 0, uma vez que, por hipótese, não há cargas no espaço vazio.
O resultado é

div 8 = - ! div aa/c — - V2q, = 0 em

Mas como div a == 0, obtemos

V2q, = 0

Esta é, no entanto, simplesmente a equação de Laplace. É bem conhecido que a única solução desta equação que é regular em todo o espaço é q = 0.

(Todas as outras soluções implicam a existência de carga em alguns pontos do espaço e, portanto, uma falha da equação de Laplace nesses pontos.) Wf1 • t e 3C são as únicas quantidades fisicamente significativas relacionadas ao campo eletromagnético.

Machine Translated by Google

Deve-se observar, no entanto, que a condição 4> = 0 só vale no espaço vazio porque, na presença de carga, a equação (7) leva a V 24> = -4rp, que é a equação de Poisson. Esta equação tem soluções regulares não nulas, desde que p não seja zero em todos os pontos.

Concluímos, então, que no espaço vazio obtemos o seguinte: expressões para os campos:

:JC=VXa 1 aa (11)

=-

e c:ac — (12)

sujeito à condição de que

diva = 0 (13)

Finalmente, obtemos a equação diferencial parcial que define a no espaço vazio inserindo (11), (12) e (13) em (6), desde que também assumamos que j = 0, como é necessário na ausência de matéria. Obtemos

$$\nabla^2 a - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = 0 \qquad (14)$$

As equações (11), (12), (13) e (14), juntamente com as condições de contorno, determinam completamente os campos eletromagnéticos em uma cavidade que não contém cargas ou correntes.

4. Condições de Contorno. Como apontado na Seção 1, foi demonstrado experimental e teoricamente* que a distribuição de equilíbrio da densidade de energia em uma cavidade oca não depende da forma do recipiente nem do material das paredes. Portanto, temos a liberdade de escolher as condições de contorno mais simples possíveis que sejam compatíveis com o equilíbrio. Escolheremos um conjunto de condições de contorno que são um tanto artificiais do ponto de vista experimental, mas que simplificam bastante o tratamento matemático.

Imaginemos um cubo de lado L com paredes muito finas de um material que não seja condutor de eletricidade. Imaginemos então que essa estrutura se repita periodicamente no espaço em todas as direções, de modo que o espaço seja preenchido com cubos de lado L. Suponhamos , ainda , que os campos sejam os mesmos em pontos correspondentes de cada cubo.

Afirmamos agora que essas condições de contorno produzirão a mesma densidade de radiação de equilíbrio que quaisquer outras condições de contorno nas paredes. Para provar isso, basta perguntarmos por que as condições de equilíbrio são independentes do tipo de contorno. A resposta é que, a partir dessas condições, nenhuma parede é realmente necessária, mas os resultados termodinâmicos são os

mesmos que para uma parede arbitrária, incluindo, por exemplo, um refletor perfeito ou um absorvedor perfeito.

Machine Translated by Google

Do ponto de vista termodinâmico, a parede serve apenas para impedir que o sistema ganhe ou perca energia. Tornar os campos periódicos deve ter o mesmo efeito, pois cada cubo não pode ganhar energia dos outros cubos nem perdê-la para eles; se não fosse assim, o sistema deixaria de ser periódico. Portanto, temos uma condição de contorno que cumpre a função essencial de manter a energia em qualquer cubo individual constante. Embora artificial, ela deve fornecer a resposta correta e facilitará os cálculos, simplificando a análise de Fourier dos campos.

6. Análise de Fourier. Agora, a(x, y, z, t) pode ser qualquer solução concebível das equações de Maxwell, com a única restrição, imposta por nossas condições de contorno, de que deve ser periódica no espaço com período L/n, onde n é um número inteiro.* É um teorema matemático bem conhecido que uma função periódica arbitrária, t f(x, y, z, t), pode ser representada por meio de uma série de Fourier da seguinte maneira:

f(x, y, z, t)

= ÿ[az,m,n(t) cos ÿ (lx+my+nz)+bz,m,n(t) sin ÿ (lx+my+nz)] (15)
l,m,n

onde l, m, n são inteiros que variam de -ÿ a ÿ , incluindo zero. Qualquer escolha de a's e b's que leve a uma série convergente define uma função, f(x, y, z, t), que é periódica no sentido de que assume o mesmo valor a cada instante em que x, y ou z varia em L. Para uma dada função, f(x, y, z, t) , pode-se demonstrar que a , n(t) e b, m, n(t) são dados pelas seguintes fórmulas:

nz.m,,.(t) + az,_,.,_,.(t)
= 2/£3 [L [L [L cqaL 2π (lx + my+ nz)f(x, y, z, t) dx dy dz o }o }o

(16)

/.z,,.,,.(t) - b_z,-m,-n(t)
= 2/La [L [L [L dx }o }o }o dy dz sin { 2 (lx + meu+ nz)f(x, y, z, t)

Essas fórmulas ilustram o fato de que apenas a soma dos valores de a e a diferença dos valores de b são determinadas pela função f.

Com base no exposto, concluímos que f pode ser completamente especificado em termos das quantidades az,m,n + a_z,-m, -n e bz,m,n - b_z,-m,-n, mas preferimos manter a especificação em termos de a1,m,n e b1,m,n devido às expressões matemáticas mais simples que elas proporcionam.

• Haverá, naturalmente, as condições de regularidade usuais que impedem que a função seja infinita ou descontínua. A
função deve ser contínua ao longo de toda a sua extensão .

Machine Translated by Google

As equações (16) são obtidas com o auxílio das seguintes relações de ortogonalidade:*

$$\int_0^L \int_0^L \int_0^L dx\,dy\,dz \cos\frac{2\pi}{L}(lx + my + nz) \sin\frac{2\pi}{L}(l'x + m'y + n'z) = 0$$

$$\int_0^L \int_0^L \int_0^L dx\,dy\,dz \cos\frac{2\pi}{L}(lx + my + nz) \cos\frac{2\pi}{L}(l'x + m'y + n'z) = 0 \quad (17a)$$

a menos que

(l = l', m = m', n = n') ou (l = -l', m = -m', n = -n')

nesse caso é £3/2, exceto quando l = m = n = 0, caso em que é £3.

$$\int_0^L \int_0^L \int_0^L \sin\frac{2\pi}{L}(lx + my + nz) \sin\frac{2\pi}{L}(l'x + m'y + n'z) = 0 \quad (17b)$$

a menos que

(l = l', m = m', n = n') ou (l = -l', m = -m', n = -n')

em que caso é £3/2. (Sugere-se que o leitor prove (17a e b) como exercício e use os resultados para obter (16).)

A análise de Fourier, na forma anterior, permite-nos representar uma função arbitrária como uma soma de ondas planas estacionárias de todos os valores possíveis. comprimentos e amplitudes. Todo o tratamento é essencialmente o mesmo que o usado com ondas em cordas e tubos de órgão, exceto que é tridimensional.

Vamos agora expandir o potencial vetorial em uma série de Fourier. Como a é um vetor com três componentes, cada az,mn e bz,m,n também possui três componentes e, portanto, deve ser representado como um vetor:

$$a = \sum_{l,m,n} \left[a_{l,m,n}(t) \cos\frac{2\pi}{L}(lx+my+nz) + b_{l,m,n}(t) \sin\frac{2\pi}{L}(lx+my+nz) \right]$$

Assumimos que ao,o,o é zero na série acima. t

*Para a origem do termo "ortogonalidade", veja o Capítulo 16, Seção 10; veja também o Capítulo 10, Seção 24.

1 Isso decorre do fato de que a parte de a que é constante no espaço corresponde-

não responde a nenhum campo magnético e a um campo elétrico espacialmente uniforme $\left(\mathcal{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial a}{\partial t}\right)$.

f=;um campo desse tipo requer uma distribuição de carga em algum lugar para produzi-lo, ou seja, nos limites, e como assumimos que nenhuma distribuição desse tipo está presente, definimos ao,o,o = 0.

Machine Translated by Google

Apresentamos agora o vetor de propagação k, definido da seguinte forma:

211-l 2 quartos 2m

k.=r ÿc.=-y k.=-y;

k2 = ('7.r (l2 + m2 + n2)

SIG (Sistemas de Informação Geográfica)

Orientando nossos eixos de coordenadas de forma que o eixo z esteja direcionado ao longo do vetor k , obtemos l = m = 0 e k = 2-rr/L. Da definição de k, segue-se que k/'lnr é o número de ondas na distância L; portanto, o comprimento de onda é ÿ = 'lnr/k, ou

k = 'lnr/X (19)

Nesse sistema de coordenadas, uma onda típica assume a forma cos 2rnz/L. Assim, o vetor k está na direção em que a fase da onda muda. Voltando aos eixos de coordenadas arbitrários, concluímos que k é um vetor na direção de propagação da onda. Sua magnitude é 27r /)., e ele pode assumir apenas os valores permitidos pelas integrais l, m e n na equação (18) .

Com essa simplificação da notação, obtemos

a = ÿ [aA{t) cos k • r + b11(t) sin k • r] (20)
II

onde a soma se estende por todos os valores permitidos de k.

6. Polarização de Ondas. Vamos agora aplicar a condição div a = 0 a (20). Temos

diva = I (-k • a11 sin k • r + k • b11 cos k • r) = 0
II

É um teorema bem conhecido que se uma série de Fourier é identicamente zero, então todos os coeficientes, ak e bÿt, devem ser nulos.

Problema 1: Prove o teorema acima, usando as relações de ortogonalidade (17).

Da equação acima, conclui-se que k • a11(t) = k · bÿt(t) = 0. Portanto, a11(t) e bÿt(t) são perpendiculares a k, assim como os campos elétrico e magnético pertencentes à k-ésima onda. Como as vibrações são normais à direção de propagação, as ondas são transversais. A direção do campo elétrico também é chamada de direção de polarização.

Para descrever a orientação de ak, vamos retornar ao conjunto de eixos coordenados em que o eixo z está na direção de k. O vetor a11 pode ter apenas componentes x e y , e se especificarmos os valores destes, teremos especificado tanto a magnitude quanto a direção de a11.

Designamos a direção do vetor ak pelo subscrito p, escrevendo a11,., onde p pode assumir os valores 1 e 2. Para p = 1, a11,. está na direção x ; mas para p = 2, está na direção y. Todas as possibilidades

Machine Translated by Google

Os vetores CIA podem então ser representados como a soma de um vetor a11.1 e um vetor a11.2 . Portanto, o potencial vetorial mais geral, sujeito à condição de que div a = 0, é dado por

a = ÿ [ak.l<(t) cos k • r + bk.l<(t) sin k • r] (21)
1l.li

Aqui, a soma se estende a todos os vetores k permitidos e aos dois valores possíveis de p.

Pode-se verificar a partir de (14) e (21) que a ,.,. satisfaz a seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 a_{k,\mu}}{dt^2} + k^2c^2 a_{k,\mu} = 0 \tag{22}$$

o que demonstra que os termos aA,p oscilam com movimento harmônico simples e com frequência angular, w = kc.

7. Avaliação da Energia Eletromagnética. O primeiro passo na avaliação da energia eletromagnética é expressar £ e :JC em termos da série de Fourier para a. Essas expressões são:

£ = - ! (cjk.l< cos k • r + b11,. sin k • r)
c ,.,.

:JC = ÿ (-k X aÿÿ,p sin k • r + k X b,.,_ cos k • r)
ll,p

Problema 1: Derive as expressões acima para a Areia 3C.

Vamos agora avaliar o seguinte em relação ao cubo de lado L:

&rJ S2 dT = 1 / &rc2 ÿ ÿ J 0 J 0 J 0 (ct,.,.. $\int^L \int^L \int^L$ [L [L [L dx dy dz

a,+,,ilÿcos•k,r,cos k' • r + b11,..sin k • r sin k' • r + a..,.b'... sen k · r cos k' . r

Com o auxílio das equações (17), vemos que todas as integrais se anulam, exceto quando tiÿc,.. 1 e que todos os termos envolvendo a11,.. • b11,,.' são zero. Além disso, k = k' all,.' = 0 a menos que }J = p.'. Quando p. 7f'!. p.', os dois vetores são, por definição, perpendiculares entre si. Assim, a expressão acima se reduz a

$$\int \frac{\mathcal{E}^2\, d\tau}{8\pi} = \frac{L^3}{8\pi c^2} \sum_{k,\mu} \left[(\dot{a}_{k,\mu})^2 + (\dot{b}_{k,\mu})^2 \right]$$

Com um método semelhante, que envolve um pouco mais de álgebra, obtemos

$$\int \frac{\mathcal{H}^2\, d\tau}{8\pi} = \frac{L^3}{8\pi} \sum_{k,\mu} k^2 \left[\frac{1}{2} (a_{k,\mu})^2 + \frac{1}{2} (b_{k,\mu})^2 \right]$$

Problema S: Derive a expressão acima para f3C1 d,..